- Letizia, Marie-Eve, "O lugar da mulher em 'Levantado do chão' de José Saramago", in Taíra, n° 3, Grenoble, 1991.
II - Albuquerque, Luís de, e Santos, Maria Emília Madeira, História Geral de Cabo Verde, Lisboa/Praia: Centro de Estudos de História e Cartografia Antiga, Instituto de Investigação Científica Tropical/Direcção Geral do Património Cultural de Cabo Verde, 1991.
- Andrade, Elisa Silva, Les îles du Cap-Vert de la "Découverte" à l'Indépendance Nationale (1460-1975), Paris: L'Harmattan, 1996.
III - Ramos, Péricles Eugênio da Silva, "O Modernismo na poesia" in História da Literatura Brasileira (dir. A. Coutinho), Rio, J. Olympio/Niterói, UFF, 1986, Tome V.
NB. L'édition indiquée des Poésies complètes de R. Bopp comporte des articles critiques.
IV - Dacanal, José Hildebrando, "Terras do Sem Fim: o capitalismo na Mata Virgem" in O Romance de 30, Porto Alegre, Mercado Aberto, 1982.
- Duarte, Eduardo de Assis, Jorge Amado: romance em tempo de utopia, Rio de Janeiro, Record, 1996.
- Faure, Françoise Castagnez, "L'Univers fantastique et merveilleux dans certaines œuvres de Jorge Amado" in Arquivos do Centro Cultural Português, Paris, Fundação Calouste Gulbenkian, 1982.

### Russe

Auteurs concernant les épreuves de dissertation et de commentaire
- F. Dostoevskij. Besy.
- S. Esenin. Izbrannaja poèzija. Paris, YMCA-Press, 1999.
- IL'F i Petrov. Dvenadcat' stul'ev.

### Mathématiques

**Épreuves écrites**
Le programme est formé des titres A et B de l'annexe I.
**Épreuves orales**
Épreuve d'exposé
Le programme est formé du titre A augmenté des paragraphes suivants du titre B de l'annexe I:
1.I."Généralités sur le langage et le raisonnement mathématiques. Éléments de logique."
1.II."Ensembles, relations, applications."
1.III."Rudiments de cardinalité."
2.I.3."Structure des ensembles de nombres."
2.III.5."Calcul matriciel", alinéa b).
2.V.2."Configurations", alinéas a) et c).
2.V.3."Transformations".
2.V.4."Emploi des nombres complexes en géométrie", alinéas a), c) et d).
3.I.1."Suites de nombres réels et de nombres complexes", alinéas a), b), d) et e).
3.I.2."Fonctions d'une variable réelle".
3.II.2."Dérivation", dans le cas des fonctions à valeurs réelles ou complexes.
3.II.3."Intégration sur un intervalle compact", dans ce même cas.
3.II.4."Étude locale de fonctions", alinéa a).
3.IV.2."Équations linéaires scalaires", alinéa b).
Épreuve sur dossier
Le programme est formé du titre A de l'annexe I.

## ANNEXE I

### A. Programmes de l'enseignement secondaire

**1.** La réunion des programmes de mathématiques des collèges et des lycées d'enseignement général et technologique en vigueur au 1er janvier de l'année du concours et de ceux en vigueur au 1er janvier de l'année précédente.
**2.** L'utilisation des calculatrices électroniques est défini par les arrêtés du 15 mai 1997 complétés par la circulaire n° 99-018 du 01-02-1999 parue au B.O. n°6 du 11-02-1999.
Dans ce cadre, les candidats doivent se munir d'une calculatrice scientifique programmable, alphanumérique ou non, et graphique. Ils doivent savoir utiliser leur calculatrice dans les situations numériques et algorithmiques liées au programme. Cet emploi combine les capacités suivantes, qui constituent un savoir-faire de base et sont seules exigibles:
- Savoir programmer une instruction d'affectation.
- Savoir effectuer les opérations arithmétiques sur les nombres et savoir comparer des nombres.

- Savoir utiliser les touches des fonctions qui figurent au programme et savoir programmer le calcul des valeurs d'une fonction d'une ou plusieurs variables permis par ces touches.
- Savoir programmer une instruction séquentielle, alternative ou itérative.
- Savoir afficher à l'écran la courbe représentative d'une fonction.

Ils doivent en outre munir leur calculatrice de programmes permettant:

- la recherche de solutions approchées d'une équation numérique à une variable,
- le calcul de valeurs approchées d'une intégrale.

### B. Programme complémentaire

Comme il est indiqué dans les instructions, les problèmes et les méthodes numériques et les aspects algorithmiques et informatiques (construction et mise en forme d'algorithmes, comparaison de leur performance, rédaction méthodique de programmes) sont largement exploités. Dans le texte du programme, ils sont représentés par le signe §.

**1. Notions sur la logique et les ensembles**

Tout exposé de logique formelle est exclu.

I. Généralités sur le langage et le raisonnement mathématiques. Éléments de logique.

L'étude des notions mentionnées dans cette section est essentiellement descriptive et basée sur des exemples choisis dans l'ensemble du programme. Le but visé est de mettre en évidence l'importance du langage et du raisonnement et d'en dégager quelques traits essentiels.

Occurrences libres (ou parlantes) et occurrences liées (ou muettes) d'une variable dans une expression mathématique; signes mutificateurs usuels ($\int \ldots d\ldots$; $\sum$; $\mapsto$; $\{\ldots|\ldots\}$; ; ; etc.) ; mutifications implicites.

Calcul propositionnel: connecteurs logiques; tables de vérité; tautologies.

Utilisation des connecteurs et des quantificateurs dans le discours mathématique; lien entre connecteurs logiques et opérations ou relations ensemblistes.

Pratique du raisonnement mathématique : hypothèses, conclusions, quelques figures usuelles du raisonnement (raisonnement par contraposition, par disjonction de cas, par l'absurde, utilisation d'exemples ou de contre-exemples, etc.); pour les énoncés sous forme d'implication, distinction entre condition nécessaire et condition suffisante, entre proposition directe et proposition réciproque ; cas particuliers de la recherche de lieux géométriques, d'ensembles de solutions d'équations.

II. Ensembles, relations, applications

Opérations ensemblistes usuelles; produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles.

Relations et applications; lois de composition internes ou externes.

Ensemble des parties d'un ensemble; image directe ou image réciproque d'une partie par une application ; comportement des opérations d'image directe et d'image réciproque vis-à-vis des opérations ensemblistes.

Familles d'ensembles; réunions et intersections "infinies".

Relations d'ordre; majorants, borne supérieure…

Ensemble IN des nombres entiers naturels. Toute partie non vide de IN admet un plus petit élément. Raisonnement par récurrence.

Relations d'équivalence; classes d'équivalence, partition associée, ensemble quotient, compatibilité d'une loi de composition avec une relation d'équivalence (passage au quotient).

Construction de $\mathbb{Z}$, de $\mathbb{Q}$.

III. Rudiments de cardinalité.

Équipotence de deux ensembles; classe des ensembles équipotents à un ensemble donné; notion de cardinal.

Théorème de Cantor ("aucun ensemble n'est équipotent à l'ensemble de ses parties").

Fonction caractéristique d'une partie d'un ensemble ; équipotence entre l'ensemble des parties d'un ensemble E et l'ensemble des applications de E dans {0,1}.

Ensembles finis et infinis.

Ensembles dénombrables: exemples usuels ($\mathbb{N}^2$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, l'ensemble des suites finies d'entiers, l'ensemble des parties finies de IN, l'ensemble $\mathbb{Q}[X]$ des polynômes à coefficients rationnels, l'ensemble des nombres algébriques, etc.).

Puissance du continu (cardinal de P(IN) ou de

IR); non dénombrabilité de IR.

**2. Algèbre et géométrie**

I. Nombres et structures

1. Groupes

a) Groupes, morphismes de groupes. Sous-groupes, sous-groupe engendré par une partie. Groupes cycliques. Ordre d'un élément; théorème de Lagrange. Image et noyau d'un morphisme de groupes. Sous-groupes distingués, groupe quotient.

Groupe opérant sur un ensemble, orbites. Éléments conjugués.

§ b) Permutations d'un ensemble fini, groupe symétrique. Cycles; transpositions. Décomposition d'une permutation en produit de cycles disjoints, en produit de transpositions. Signature d'une permutation, groupe alterné.

2. Anneaux et corps

Anneaux (unitaires), morphismes d'anneaux. Sous-anneaux.

Anneaux commutatifs, anneaux intègres ; idéaux, idéaux principaux; anneaux quotients. Corps (commutatifs), sous-corps; caractéristique d'un corps.

3. Structure des ensembles de nombres

a) Anneau ℤ des nombres entiers relatifs (ou rationnels). L'anneau ℤ est intègre; divisibilité dans ℤ. Division euclidienne; sous-groupes additifs de ℤ.

Les idéaux de ℤ sont principaux; théorème de Bezout.

§ b) Nombres premiers; décomposition en facteurs premiers.

PGCD, PPCM; algorithme d'Euclide.

c) Congruences; anneaux ℤ/nℤ, caractérisation des éléments inversibles.

d) Corps des rationnels, corps des réels, corps des complexes.

Il. Polynômes et fractions rationnelles

Dans ce chapitre, K désigne un sous-corps de ℂ.

1. Polynômes à une indéterminée

§ a) Algèbre K[X]; degré d'un polynôme, terme dominant, polynôme unitaire.

L'anneau K[X] est intègre; divisibilité dans K[X]. Division euclidienne.

Les idéaux de K[X] sont principaux; théorème de Bezout.

Polynômes irréductibles; décomposition en facteurs irréductibles.

PGCD, PPCM; algorithme d'Euclide.

b) Fonctions polynômes.

Racines (ou zéros) d'un polynôme, ordre de multiplicité. Polynômes scindés.

Correspondance entre polynômes et fonctions polynômes.

Équations algébriques. Relations entre les coefficients et les racines d'un polynôme scindé.

c) Dérivation des polynômes; formule de Taylor.

d) Théorème de D'Alembert; polynômes irréductibles de ℂ[X] et de IR[X].

Factorisation des polynômes dans ℂ[X] et dans IR[X].

2. Fractions rationnelles à une indéterminée

a) Corps K(X); forme irréductible d'une fraction rationnelle non nulle.

b) Fonctions rationnelles: pôles, zéros; ordre d'un pôle ou d'un zéro.

c) Décomposition en éléments simples. Cas du corps ℂ et du corps IR.

d) Exemples simples de problèmes d'élimination.

III. Algèbre linéaire

Dans cette partie, K désigne un sous-corps de ℂ.

1. Espaces vectoriels

a) Espaces vectoriels. Applications linéaires, isomorphismes, endomorphismes, automorphismes. Formes linéaires. Espace vectoriel $L(E,F)$, algèbre $L(E)$, groupe linéaire GL(E). Espace vectoriel produit d'une famille finie d'espaces vectoriels.

b) Sous-espaces vectoriels; image et noyau d'une application linéaire. Sous-espace engendré par une partie. Somme d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels , somme directe. Sous-espaces vectoriels supplémentaires, projecteurs.

c) Familles libres, familles génératrices, bases.

d) Étant donné une application linéaire u de E dans F et un supplémentaire E' de ker u dans E, u définit un isomorphisme de E' sur lm u.

2. Espaces vectoriels de dimension finie

a) Espaces admettant une famille génératrice

finie. Théorème de la base incomplète, existence de bases; dimension. Dimension d'un sous-espace, rang d'une famille de vecteurs. Existence de supplémentaires. Dimension d'une somme directe.
b) Rang d'une application linéaire; formule du rang, caractérisation des isomorphismes.
c) Formes linéaires et hyperplans, équation d'un hyperplan.
d) Dualité. Bases associées d'un espace E et de son dual E*. Orthogonal dans E* d'une partie de E, orthogonal dans E d'une partie de E*: dimension de l'orthogonal, double orthogonal.

3. Matrices

a) Espace vectoriel $M_{p,q}(K)$ des matrices à p lignes et q colonnes. Isomorphisme entre $L(K_q, K_p)$ et $M_{p,q}(K)$. Produit matriciel, transposition. Algèbre $M_n(K)$ ; matrices inversibles, groupe linéaire $GL_n(K)$. Matrices symétriques, antisymétriques.
b) Matrice d'une application linéaire d'un espace vectoriel dans un autre, ces espaces étant munis de bases; matrice d'un endomorphisme d'un espace vectoriel muni d'une base, matrice d'une famille finie de vecteurs relativement à une base. Matrice de passage (la matrice de passage de la base B à la base C est la matrice dont la j-ième colonne est formée des coordonnées dans B du j-ième vecteur de C). Effet d'un changement de base(s) sur la matrice d'une application linéaire.
c) Trace d'une matrice carrée, trace d'un endomorphisme.
d) Rang d'une matrice. Utilisation de matrices carrées extraites pour la détermination du rang. Matrices équivalentes. Caractérisation à l'aide du rang. Toute matrice M de rang r est équivalente à la matrice $I_r = (\alpha_{ij})$, définie par les relations $\alpha_{ij} = 1$ si $1 \leq j \leq r$, et $\alpha_{ij} = 0$ dans tous les autres cas. Rang de la transposée d'une matrice.
e) Systèmes d'équations linéaires, rang. Conditions de compatibilité, systèmes de Cramer.

4. Applications multilinéaires, déterminants

a) Définition des applications multilinéaires, des applications symétriques, antisymétriques, alternées.
b) Formes n-linéaires alternées sur un espace vectoriel de dimension n. Déterminant de n vecteurs dans une base d'un espace vectoriel de dimension n, critère d'indépendance.
c) Déterminant d'un endomorphisme, du composé de deux endomorphismes; caractérisation des automorphismes.
d) Déterminant d'une matrice carrée. Déterminant du produit de deux matrices, de la transposée d'une matrice. Mineurs, cofacteurs, développement par rapport à une ligne ou une colonne.
e) Applications des déterminants, expression de l'inverse d'une matrice carrée inversible, formules de Cramer; orientation d'un espace vectoriel réel de dimension finie.
f) En relation avec la géométrie, application des déterminants à l'étude des systèmes linéaires de deux ou trois équations à deux ou trois inconnues.

5. Calcul matriciel

§ a) Exemples de calculs par blocs. Exemples d'emploi de normes matricielles. Conditionnement d'une matrice.
§ b) Opérations élémentaires sur les lignes (ou les colonnes) d'une matrice; addition d'un multiple d'une ligne à une autre, multiplication d'une ligne par un scalaire non nul, échange de deux lignes. Applications à la résolution des systèmes linéaires, au calcul de déterminants, à l'inversion des matrices carrées et au calcul du rang.
Algorithme du pivot de Gauss; pivot partiel, pivot total.

6. Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

Dans ce paragraphe, le corps de base est **R** ou **C**.
a) Sous-espaces stables par un endomorphisme. Si u et v commutent, lm u et ker u sont stables par v. Polynômes d'un endomorphisme; théorème de décomposition des noyaux: si P et Q sont premiers entre eux,
ker PQ(u) = ker P(u) ⊕ ker Q(u).
b) Valeurs propres d'un endomorphisme, sous-espaces propres, vecteurs propres.
c) Réduction d'un endomorphisme en dimension finie.
Polynôme annulant un endomorphisme; lien avec le spectre.

Polynôme caractéristique, ordre de multiplicité d'une valeur propre. Théorème de Cayley-Hamilton.
Endomorphismes diagonalisables; l'espace est somme directe des sous-espaces propres. Tout endomorphisme dont le polynôme caractéristique est scindé et a toutes ses racines simples est diagonalisable. Pour qu'un endomorphisme soit diagonalisable, il faut et il suffit qu'il annule un polynôme scindé dont toutes les racines sont simples.
Sous-espaces caractéristiques. Tout endomorphisme u dont le polynôme caractéristique est scindé peut être trigonalisé: l'espace est somme directe des sous-espaces caractéristiques $F_j$ et il existe une base de chaque $F_j$ telle que la matrice dans cette base de l'endomorphisme induit par u soit triangulaire supérieure; en outre, la dimension de $F_j$ est égale à l'ordre de multiplicité de la valeur propre $\lambda_j$. Un tel endomorphisme u s'écrit d'une manière et d'une seule sous la forme $u = d + n$, où d est diagonalisable, n est nilpotent, et $nd = dn$.
§ d) Valeurs propres d'une matrice carrée, vecteurs (colonnes) propres. Matrices semblables. Diagonalisation, trigonalisation des matrices carrées. Exemples d'emploi de décomposition en blocs (produits, matrices diagonales par blocs, triangulaires par blocs).

IV. Espaces euclidiens, espaces hermitiens

(cf. analyse 3.I.6 espaces préhilbertiens réels ou complexes.)
Les espaces vectoriels considérés dans ce chapitre sont de dimension finie.

1. Espaces euclidiens

a) Isomorphisme canonique avec le dual.
Sommes directes orthogonales. Dimension de l'orthogonal d'un sous-espace, normale à un hyperplan. Projecteurs et symétries orthogonales.
b) Adjoint d'un endomorphisme; matrice associée dans une base orthonormale.
Endomorphismes symétriques, antisymétriques.
c) Automorphismes orthogonaux. Groupe orthogonal O(E), groupe des rotations (ou spécial orthogonal) SO(E). Matrices orthogonales. Groupes O(n) et SO(n). Matrice associée à un automorphisme orthogonal dans une base orthonormale.
Changements de base orthonormale.
d) Déterminant de n vecteurs d'un espace vectoriel euclidien orienté de dimension n.
Produit vectoriel en dimension 3; expression dans une base orthonormale directe.

2. Géométrie vectorielle euclidienne

a) Les réflexions engendrent le groupe orthogonal O(E).
b) Dans le plan euclidien orienté ($n = 2$): matrice d'une rotation; angle d'une rotation. Morphisme canonique de IR sur SO(2).
Classification des automorphismes orthogonaux à partir du sous-espace des points invariants.
c) Dans l'espace euclidien orienté ($n = 3$):
Axe et angle d'une rotation. Les demi-tours engendrent SO(3).
Classification des automorphismes orthogonaux à partir du sous-espace des points invariants.
d) En dimension 2 ou 3 : groupe des similitudes ; similitudes directes.
Rapport d'une similitude, automorphisme orthogonal associé.

3. Espaces hermitiens

a) Sommes directes orthogonales. Projecteurs orthogonaux.
b) Adjoint d'un endomorphisme; matrice associée dans une base orthonormale.
Endomorphismes hermitiens, matrices hermitiennes.
c) Automorphismes unitaires. Groupe unitaire U(E). Groupe U(n) des matrices unitaires d'ordre n.

4. Calcul matriciel et normes euclidiennes

§ a) Calcul de la projection orthogonale d'un vecteur sur un sous-espace et de la distance d'un point à un sous-espace. Application aux problèmes de moindres carrés; minimisation de $\|AX-B\|^2$, où $A \quad M_{n,p}(IR)$ et rang $A = p$.
§ b) Décomposition d'un élément M de $GL_n(IR)$ sous la forme $M = QR$, où Q est orthogonale et R est triangulaire supérieure, par la méthode de Householder.

5. Réduction des endomorphismes symétriques et des endomorphismes hermitiens
§ a) Diagonalisation d'un endomorphisme symétrique (resp. hermitien) dans une base orthonormale.
Diagonalisation d'une matrice symétrique (resp. hermitienne) au moyen d'une matrice orthogonale (resp. unitaire).
La plus grande valeur propre d'une matrice symétrique A est égale à

$$\sup_{X\neq 0} \frac{{}^tXAX}{{}^tXX}$$

b) Formes bilinéaires symétriques sur un espace euclidien, formes quadratiques, polarisation. Endomorphisme symétrique associé à une forme quadratique; réduction dans une base orthonormale.

V. Géométrie affine et euclidienne

Dans ce chapitre, l'étude est placée dans le plan et l'espace.

1. Calcul barycentrique; repérage
a) Sous-espaces affines; direction d'un sous-espace affine.
b) Repères affines, coordonnées barycentriques.
c) Parties convexes.
d) Repères cartésiens, polaires, cylindriques et sphériques. Changement de repère orthonormal.

2. Configurations
a) Cercles dans le plan. Puissance d'un point par rapport à un cercle.
Ensemble des points M dont le rapport des distances à deux points A et B est constant, ou tels que l'angle de droites (ou de demi-droites) (MA, MB) soit constant
b) Sphères. Intersection d'une sphère et d'un plan, de deux sphères.
c) Coniques. Définitions focales, bifocales; tangente et normale en un point; ellipse déduite d'un cercle par affinité orthogonale; hyperbole rapportée à ses asymptotes. Équation cartésienne d'une conique; réduction en repère orthonormal. Équation polaire d'une conique dont un foyer est à l'origine, la directrice associée et l'excentricité étant données.

3. Transformations
a) Applications affines; effets sur la barycentration et sur la convexité. Application linéaire associée. Projections, affinités, symétries.
b) Groupe des transformations affines. Morphisme canonique du groupe affine sur le groupe linéaire; groupe des translations, groupe des homothéties-translations. Isomorphisme canonique du stabilisateur d'un point O sur le groupe linéaire.
c) Groupe des isométries, groupe des déplacements. Les réflexions engendrent le groupe des isométries ; dans l'espace, les demi-tours engendrent le groupe des déplacements.
Similitudes planes directes et indirectes.
d) Classification des déplacements et des isométries du plan et des déplacements de l'espace à partir de l'ensemble des points invariants.
e) Exemples de recherche du groupe des isométries laissant globalement invariante une configuration du plan ou de l'espace. Exemples de recherche de transformations affines transformant une configuration en une autre.

4. Emploi des nombres complexes en géométrie
a) Racines de l'unité et polygones réguliers.
b) Adjonction d'un point à l'infini au plan complexe.
c) Transformations $z \mapsto a\bar{z} + b$ et $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$.
§ d) Lignes de niveau des fonctions
$z \mapsto z\text{-}a$, $z \mapsto \mathrm{Arg}(z\text{-}a)$, $z \mapsto \left|\frac{z-a}{z-b}\right|$ et $z \mapsto \mathrm{Arg}\frac{z-a}{z-b}$.

Exemples de familles de courbes orthogonales associées à des transformations simples du plan complexe.

## 3. Analyse et géométrie différentielle

I. Suites et fonctions

1. Suites de nombres réels et de nombres complexes
a) Suites convergentes, divergentes; suites extraites.
Opérations algébriques sur les limites. Relations de comparaison: domination (u est dominée par v), prépondérance (u est négligeable devant v) et équivalence (u est équivalente à v). Notations $u = O(v)$, $u = o(v)$ ou $u << v$, et $u \sim v$.
b) Toute partie majorée non vide de IR admet une borne supérieure.

Toute suite croissante majorée de nombres réels converge. Suites adjacentes. Développement décimal d'un nombre réel. Droite numérique achevée $\overline{\mathbb{R}}$.
c) Toute suite de Cauchy de nombres réels ou complexes converge. De toute suite bornée de nombres réels ou complexes, on peut extraire une suite convergente. Théorème du point fixe pour une application contractante d'un intervalle fermé de IRdans lui-même.
§ d) Étude du comportement asymptotique de suites. Approximation d'un nombre réel ou complexe au moyen de suites: rapidité de convergence et performance d'un algorithme. Accélération de convergence: méthode de Richardson-Romberg.
§ e) Exemples d'étude de suites de nombres réels définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ et par une condition initiale.
Approximation d'une solution d'une équation numérique. Méthode de dichotomie. Méthode des approximations successives; méthodes de Newton, d'interpolation linéaire et d'ajustement linéaire.

2. Fonctions d'une variable réelle

Les fonctions étudiées dans ce paragraphe sont définies sur un intervalle de IRet à valeurs réelles ou complexes.
a) Limite d'une fonction en un point; continuité en un point. Opérations sur les limites et sur les fonctions continues. Image d'une suite convergente par une fonction continue.
Comparaison des fonctions au voisinage d'un point : domination, prépondérance et équivalence.
b) Image d'un intervalle par une fonction réelle continue, image d'un segment. Continuité de la fonction réciproque d'une fonction réelle continue strictement monotone sur un intervalle.

3. Espaces vectoriels normés, réels ou complexes

Les applications étudiées dans ce paragraphe sont définies sur une partie d'un espace vectoriel normé et à valeurs dans un espace vectoriel normé.
a) Normes sur un espace vectoriel réel ou complexe.
Norme, distance associée, boules. Parties bornées, diamètre d'une partie.
Distance d'un point à une partie non vide. Applications lipschitziennes. Produit d'une famille finie d'espaces normés.
Exemples de normes usuelles sur les espaces de suites et de fonctions.
b) Voisinages d'un point d'un espace vectoriel normé, ouverts, fermés; adhérence, intérieur et frontière d'une partie, parties denses, points isolés, points d'accumulation.
Distance induite sur une partie; voisinages d'un point, ouverts et fermés d'une partie.
c) Limite d'une application suivant une partie, continuité en un point.
Applications continues, caractérisation par image réciproque des ouverts ou des fermés. Continuité d'une application composée; homéomorphismes. Applications uniformément continues.
d) Suites convergentes, divergentes. Caractérisation des points adhérents et des applications continues à l'aide de suites.
e) Caractérisation des applications linéaires continues, norme d'une application linéaire continue. Normes équivalentes.
Exemples de normes matricielles.
f) Opérations algébriques sur les limites. Algèbre des fonctions numériques continues.
Algèbre des fonctions polynomiales sur $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$, base canonique de cette algèbre.

4. Espaces complets

a) Suites de Cauchy, espaces complets; $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$ sont complets. Parties complètes; les parties complètes d'un espace complet sont les parties fermées.
b) Séries d'éléments d'un espace vectoriel normé. Séries convergentes, divergentes, absolument convergentes (c'est-à-dire telles que $\sum \|u_n\| < +\infty$). Dans un espace de Banach, critère de Cauchy pour la convergence d'une série, convergence des séries absolument convergentes.
c) Théorème du point fixe pour les contractions d'une partie fermée d'un espace complet.
d) Critère de Cauchy pour les applications (existence d'une limite en un point).

5. Espaces vectoriels de dimension finie
a) Équivalence des normes. Toute suite de Cauchy est convergente. De toute suite bornée on peut extraire une suite convergente. Continuité des applications linéaires et multilinéaires.
b) Définition (séquentielle) des parties compactes. Les parties compactes sont les parties fermées bornées.
Image continue d'un compact, application aux fonctions numériques. Continuité uniforme d'une application continue sur un compact.
6. Espaces préhilbertiens réels ou complexes
Produit scalaire (dans le cas complexe, linéaire à droite, semi-linéaire à gauche); norme associée, inégalité de Cauchy-Schwarz, identité du parallélogramme.
Théorème de Pythagore. Famille orthonormale, méthode de Schmidt.
Existence d'une base orthonormale dans un espace de dimension finie. Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie, distance à un tel sous-espace.
Exemples de suites de polynômes orthogonaux.
7. Suites d'applications à valeurs dans un espace de Banach
Convergence simple, convergence uniforme. Pour des applications définies sur $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$ : convergence uniforme sur tout compact; continuité et limite d'une application définie comme limite d'une suite uniformément convergente.
Critère de Cauchy de convergence uniforme.
L'espace des applications bornées d'un ensemble dans un espace de Banach, muni de la norme uniforme, est complet. Il en est de même pour l'espace vectoriel normé des applications linéaires continues d'un espace normé dans un espace de Banach.
8. Notions sur la connexité
Parties connexes; les parties connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles. Image d'une partie connexe par une application continue, théorème des valeurs intermédiaires. Connexité par arcs; elle implique la connexité et, dans le cas d'un ouvert d'un espace vectoriel normé, elle lui équivaut.

## II. Fonctions d'une variable réelle: calcul différentiel et intégral

Les fonctions étudiées dans ce chapitre sont définies sur un intervalle non réduit à un point et à valeurs dans un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{C}$.
1. Approximation des fonctions sur un segment
Approximation uniforme des fonctions continues par morceaux par des fonctions en escalier ; approximation uniforme des fonctions continues par des fonctions continues affines par morceaux et par des fonctions polynomiales. Interpolation de Lagrange.
2. Dérivation
a) Opérations sur les dérivées: linéarité, produit, quotient, fonctions composées, fonctions réciproques.
b) Inégalité des accroissements finis pour une fonction continue sur un intervalle et dérivable sur son intérieur; caractérisation des fonctions constantes et des fonctions lipschitziennes. Prolongement des fonctions de classe $C^1$ sur un intervalle privé d'un point.
c) Extrémums locaux des fonctions dérivables à valeurs réelles. Théorème de Rolle.
d) Fonction de Classe $C^k$ (k entier naturel ou k infini) Si deux fonctions sont de classe $C^k$, leur composée l'est encore. Caractérisation des $C^k$-difféomorphismes parmi les fonctions de classe $C^k$ ($k \geq 1$). Formule de Leibniz. Définition des fonctions de classe $C^k$ par morceaux: une fonction f est dite de classe $C^k$ par morceaux sur un segment [a,b] s'il existe une suite finie strictement croissante $a_0 = a, a_1, \ldots, a_n = b$ telle que la restriction de f à chacun des $]a_i,a_{i+1}[$ soit prolongeable en une fonction de classe $C^k$ sur $[a_i,a_{i+1}]$; elle est dite de classe $C^k$ par morceaux sur un intervalle quelconque si sa restriction à tout segment est de classe $C^k$ par morceaux.
e) Fonctions à valeurs réelles : fonctions convexes. Caractérisation des fonctions convexes de classe $C^1$ par la croissance de la dérivée première et par la position de la courbe par rapport aux tangentes.
3. Intégration sur un intervalle compact
Les seules connaissances exigibles portent sur l'intégration des fonctions continues par morceaux.
a) Intégrale d'une fonction en escalier sur un segment. Pour les fonctions à valeurs réelles, croissance de l'intégrale.

b) Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment.

Notations : $\int_I f(t)dt$ ; $\int_a^b f(t)dt$

Linéarité. Si $a \leq b$, $\left\| \int_a^b f(t)dt \right\| \leq \int_a^b \|f(t)\|dt$.
Pour les fonctions à valeurs réelles, croissance de l'intégrale.
Pour les fonctions à valeurs réelles ou complexes, inégalité de Cauchy-Schwarz.
c) Additivité par rapport à l'intervalle d'intégration.
Approximation de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment [a,b] par des sommes de Riemann associées à des subdivisions de [a,b].
d) Primitives d'une fonction continue sur un intervalle. Théorème fondamental du calcul différentiel et intégral: soit f une fonction continue sur I; pour tout point a de I, la fonction

$x \longmapsto \int_a^x f(t)dt$

est l'unique primitive de f sur I s'annulant au point a; inversement, pour toute primitive F de f sur I, et pour tout couple (a,b) de points de I,

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a).$$

En particulier, pour toute fonction g de classe $C^1$ sur I, et pour tout couple (a,b) de points de I,

$$g(b) - g(a) = \int_a^b g'(t)dt.$$

Intégration par parties, changement de variable. Exemples de calculs de primitives.
e) Inégalité des accroissements finis relative à un couple de fonctions de classe $C^1$, l'une vectorielle, l'autre réelle. Formule de Taylor à l'ordre p avec reste intégral pour une fonction de classe $C^{p+1}$ ; inégalité de Taylor-Lagrange.
§ f) Calcul des valeurs approchées d'une intégrale. Méthode du milieu (ou des tangentes).
Méthode des trapèzes, méthode de Simpson: majoration du reste. Algorithmes d'approximation d'une intégrale par ces deux méthodes.

4. Étude locale des fonctions

a) Développements limités, opérations sur les développements limités.
b) Exemples simples de développements asymptotiques.
Intégration des relations de comparaison au voisinage d'un point entre des fonctions continues ; intégration des développements limités.
Théorème de Taylor-Young (existence d'un développement limité d'ordre p pour une fonction de classe $C^p$).

5. Fonctions usuelles

a) Fonctions exponentielles et logarithmes, fonctions puissances, fonctions hyperboliques directes et réciproques.
b) Fonctions circulaires directes et réciproques.
Fonction $t \longmapsto e^{at}$, où a est complexe.
c) Équations fonctionnelles des fonctions linéaires, exponentielles, logarithmes et puissances.

6. Intégrales impropres

a) Intégrales convergentes, divergentes; critère de Cauchy. Convergence absolue. Emploi de l'intégration par parties.
b) Intégrales de fonctions positives. Emploi des relations de comparaison pour l'étude de la convergence. Intégration des relations de prépondérance et d'équivalence au voisinage de $+\infty$ : cas des intégrales convergentes, cas des intégrales divergentes.

7. Intégrales dépendant d'un paramètre

a) Passage à la limite uniforme dans les intégrales de fonctions continues sur un segment: application à la dérivation de la limite d'une suite de fonctions de classe $C^1$.
Exemples de passage à la limite dans les intégrales impropres.
b) Continuité et intégration des fonctions de la forme ,

$x \longmapsto \int_a^b f(x,t)dt$ où f est continue;

dérivation lorsqu'en outre $\frac{\delta f}{\delta x}$ est continue.

Exemples d'étude de fonctions définies par des intégrales.
c) Convergence en moyenne, en moyenne quadratique : normes associées.

## III. Séries

1. Séries de nombres réels ou complexes

a) Séries à termes positifs. Emploi des relations

de comparaison pour l'étude de la convergence. Sommation des relations de prépondérance et d'équivalence; cas des séries convergentes, cas des séries divergentes.
Comparaison à une série géométrique: règles de Cauchy et de D'Alembert.
Comparaison à une intégrale impropre, Convergence des séries de Riemann; comparaison à une série de Riemann.
b) Séries à termes réels ou complexes. Convergence d'une série alternée dont la valeur absolue du terme général décroît et tend vers zéro; majoration du reste.
Exemples d'emploi de la transformation d'Abel. Exemples d'emploi d'un développement asymptotique du terme général.
c) Somme de deux séries, produit d'une série par un scalaire. Série produit de deux séries absolument convergentes: $w_n = \sum_{p+q=n} u_p v_q$
d) Exemples d'encadrement ou d'évaluation asymptotique des restes d'une série convergente, des sommes partielles d'une série divergente.
§ e) Recherche de valeurs approchées de la somme d'une série convergente.

2. Séries de fonctions

Les fonctions considérées dans ce paragraphe sont à valeurs dans un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{C}$.
a) Convergence simple, convergence uniforme sur un ensemble d'une série de fonctions; convergence normale (pour la norme uniforme).
b) Continuité et limite en un point de la somme d'une série uniformément convergente. Intégration terme à terme d'une série uniformément convergente de fonctions continues sur un segment; application à la dérivation terme à terme d'une série de fonctions de classe $C^1$.
c) Exemples d'étude de fonctions définies par des séries.

3. Séries entières

Les coefficients des séries entières considérées dans ce paragraphe sont réels ou complexes.
a) Séries entières d'une variable complexe; rayon de convergence, disque (ouvert) de convergence, convergence normale sur tout compact du disque de convergence.
b) Séries entières d'une variable réelle: intégration et dérivation terme à terme dans l'intervalle (ouvert) de convergence.
Développement en série entière de $e^x$, $l_n(1 + x)$ et $(1 + x)^\alpha$, où $\alpha$ est réel.
c) Définition de exp z (ou $e^z$), cos z et sin z pour z complexe. Exponentielle d'une somme, extension des formules de trigonométrie.

4. Séries de Fourier

a) Polynômes trigonométriques; orthogonalité des fonctions $x \longmapsto e^{inx}$. Coefficients et série de Fourier d'une fonction f $2\pi$-périodique continue par morceaux à valeurs complexes (expression sous forme exponentielle, expression en cosinus et sinus). Sommes partielles $S_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)e^{ikx}$ de la série de Fourier de f;

propriété de meilleure approximation en moyenne quadratique.
b) Lorsque f est continue par morceaux, convergence de $S_n$ vers f en moyenne quadratique; formule de Parseval. Théorème de Dirichlet; convergence de $S_n(x)$ vers la demi-somme des limites à droite et à gauche de f au point x lorsque f est de classe $C^1$ par morceaux. Convergence normale de la série de Fourier d'une fonction continue et de classe $C^1$ par morceaux.

5. Emploi des séries entières et des séries de Fourier

Exemples de recherche de développements en série entière ou en série de Fourier de fonctions d'une variable réelle.
§ Exemples d'utilisation de tels développements pour obtenir des valeurs approchées d'une fonction.
Exemples d'emploi de séries entières pour la recherche de solutions d'équations différentielles.

## IV. Équations différentielles

1. Systèmes linéaires d'ordre 1

a) Écriture matricielle X'=A(t)X + B(t)où A (respectivement B) désigne une application continue d'un intervalle I de $\mathbb{R}$dans $M_n(\mathbb{C})$ (respectivement $\mathbb{C}^n$). Existence et unicité de la solution sur I du problème de Cauchy (théorème admis). Dimension de l'espace vectoriel des solutions sur I de l'équation X'=A(t)X. Méthode de variation des constantes.

b) Systèmes à coefficients constants: exponentielle d'un endomorphisme; application au problème de Cauchy. Résolution du système $X' = AX$ par réduction de A à une forme diagonale ou triangulaire.

2. Équations linéaires scalaires

a) Équation $x'' + a(t)x' + b(t)x = c(t)$, où a, b, c sont continues sur I à valeurs réelles ou complexes. Système d'ordre 1 associé, étude du problème de Cauchy; solutions de l'équation sans second membre, méthode de variation des constantes. Expression des solutions dans le cas où l'on connaît une solution de l'équation sans second membre associée ne s'annulant pas sur I.

b) Équations linéaires à coefficients constants. Dimension de l'espace vectoriel des solutions de l'équation homogène. Cas où le second membre est une exponentielle polynôme.

3. Notions sur les équations non linéaires

a) Solutions d'une équation différentielle $x' = f(t,x)$ (resp. $x'' = f(t,x,x')$), où f est de classe $C^1$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$ (resp. de $\mathbb{R}^3$). Existence et unicité d'une solution maximale du problème de Cauchy.

§ b) Recherche de solutions approchées d'une équation différentielle scalaire d'ordre 1 par la méthode d'Euler.

c) Résolution des équations des types suivants (en liaison avec la géométrie): équation associée à une forme différentielle exacte, équation à variables séparables, équation homogène:

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

d) Exemples d'emploi de changements de variable ou de fonction (en liaison avec des propriétés d'invariance), d'échange de la variable et de la fonction, de paramétrages.

§ e) Exemples d'étude qualitative des courbes intégrales d'une équation différentielle. Exemples de recherche des courbes intégrales d'un champ d'éléments de contact ou d'un champ de vecteurs dans le plan.

## V. Notions sur les fonctions de plusieurs variables réelles

1. Calcul différentiel

Les fonctions considérées dans ce paragraphe sont définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et à valeurs dans $\mathbf{R}^n$.

a) Limite, continuité, dérivée selon un vecteur, dérivées partielles. Applications de classe $C^1$ (ou continûment différentiables).

b) Développement limité à l'ordre 1 d'une application de classe $C^1$ ; différentielle, matrice jacobienne, jacobien. Si deux applications sont de classe $C^1$, leur composée l'est encore; difféomorphismes. Matrice jacobienne d'une application composée ou d'une application réciproque (les applications considérées étant de classe $C^1$). Caractérisation des difféomorphismes parmi les applications injectives de classe $C^1$. Inégalité des accroissements finis pour une fonction de classe $C^1$ ; caractérisation des fonctions constantes sur un ouvert connexe.

c) Dérivées partielles d'ordre k; théorème de Schwarz. Définition des applications de classe $C^k$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^p$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ (k entier naturel ou k infini). Si deux applications sont de classe $C^k$, leur composée l'est encore; définition des $C^k$-difféomorphismes ($k \geq 1$).

d) Gradient d'une fonction numérique de classe $C^1$, points critiques. Formule de Taylor-Young pour une fonction numérique de classe $C^1$. Étude de l'existence d'un extrémum local (c'est-à-dire d'un maximum local ou d'un minimum local) d'une fonction numérique de deux variables de classe $C^2$ en un point critique où $rt - s^2 \neq 0$.

2. Calcul intégral

Aucune difficulté théorique ne peut être soulevée sur les notions de ce paragraphe.

a) Champs de vecteurs. Divergence, rotationnel. Intégrales curvilignes. Potentiel scalaire; condition nécessaire et suffisante d'existence pour un champ de classe $C^1$ sur un ouvert étoilé.

b) Intégrales doubles et intégrales triples. Linéarité, croissance; additivité par rapport aux ensembles. Calcul par intégrations successives. Changements de variables; passage en coordonnées polaires, cylindriques ou sphériques. Exemples de calculs d'aires planes et de volumes.

## VI. Notions de géométrie différentielle

1. Courbes et surfaces

L'étude théorique est placée dans des hypothèses très larges. Toutes les formes du théorème des

fonctions implicites utiles pour ce paragraphe sont admises.
a) Définitions diverses d'une courbe (plane ou non) et d'une surface, par paramétrages ou par équations.
b) En un point régulier; tangente à une courbe, plan normal; plan tangent à une surface, normale. Tangente à l'intersection de deux surfaces en un point où les plans tangents sont distincts.
c) Étude locale d'une courbe paramétrée plane: position de la courbe par rapport à une droite; concavité en un point birégulier, rebroussements, inflexions. Étude de branches infinies. Construction de courbes paramétrées.
d) Étude locale d'une courbe paramétrée de l'espace : plan osculateur en un point birégulier, étude locale en un point trirégulier.
e) Enveloppe d'une famille de droites dans le plan, donnée par une équation $a(t)\,x + b(t)\,y + c(t) = 0$, sur un intervalle où $ab' - ba'$ ne s'annule pas.
f) Étude des courbes planes définies par des coordonnées polaires: étude locale, comportement asymptotique, construction.

2. Propriétés métriques des courbes planes

Longueur d'un arc paramétré de classe $C^1$, abscisse curviligne. Pour un arc birégulier du plan orienté, repère de Frenet, courbure, centre de courbure, développée, développantes.

3. Cinématique du point

a) Vitesse, accélération. Trajectoire, loi horaire. Moment cinétique, dynamique. Énergie cinétique.
b) Exemples de mouvements. Mouvements rectilignes, mouvements circulaires. Mouvements à accélération centrale; oscillateurs harmoniques, mouvement des planètes.

## 4. Probabilités et statistiques

1. Espaces probabilisés

Expériences aléatoires. Événements. Parallèle entre le vocabulaire probabiliste et le vocabulaire ensembliste à propos des opérations sur les événements.
Tribus. Probabilités. Espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Probabilités conditionnelles. Formule des probabilités totales; formule de Bayes. Indépendance (en probabilité) d'événements; indépendance mutuelle d'un nombre fini d'événements; indépendance deux à deux.
Les candidats devront savoir utiliser sur des exemples simples la formule donnant la probabilité d'une réunion finie d'événements (formule de Poincaré, ou du crible).
La théorie des espaces probabilisés produits n'est pas au programme.
Aucune difficulté théorique ne doit être soulevée sur les espaces probabilisés.

2. Variables aléatoires

Définition d'une variable aléatoire réelle, ou plus généralement à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. Événements liés à une variable aléatoire. On admettra que la somme et le produit de deux variables aléatoires sont des variables aléatoires.
Les propriétés générales des variables aléatoires sont hors programme. L'objectif est la mise en fonctionnement de ce concept sur les exemples décrits dans les trois alinéas qui suivent. La tribu borélienne de $\mathbb{R}^n$ est pas au programme.
a) Variables aléatoires réelles discrètes
Loi de probabilité. Fonction de répartition $F(x) = P[X \leq x]$.
Moments : espérance (ou moyenne), moment d'ordre 2, variance, écart-type.
Variables centrées, variables réduites.
Variable aléatoire $Y = g(X)$ fonction d'une variable aléatoire discrète X, où g est définie sur l'ensemble des valeurs de X.
Lois discrètes usuelles: loi uniforme, de Bernoulli, binomiale, hypergéométrique, géométrique, de Poisson.
b) Vecteurs aléatoires (à valeurs dans $\mathbf{R}^n$) discrets.
Loi de probabilité d'un vecteur à valeurs dans $\mathbb{R}^2$. Lois marginales.
Lois conditionnelles. Indépendance de deux variables aléatoires réelles.
Loi de probabilité d'un vecteur à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. Indépendance de n variables aléatoires réelles.
Linéarité de l'espérance mathématique. Espérance mathématique du produit de deux variables aléatoires indépendantes. Variance d'une somme de variables aléatoires.
Covariance. Coefficient de corrélation linéaire.
Stabilité pour la somme des lois binomiales, des

lois de Poisson.
Dans de nombreuses situations, on rencontre des exemples simples de fonctions de plusieurs variables aléatoires (sommes, produits). On admettra que si $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes, toute fonction de $(X_1, \ldots, X_p)$ est indépendante de toute fonction de $(X_{p+1}, \ldots, X_n)$. Aucune théorie générale des fonctions de plusieurs variables aléatoires n'est au programme.
c) Variables aléatoires à densité
On dit qu'une variable aléatoire X à valeurs réelles admet une densité f si sa fonction de répartition peut s'écrire sous la forme

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

où f est une fonction à valeurs réelles positives ayant un nombre fini de points de discontinuité et telle que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$$

Moments, espérance (ou moyenne), moment d'ordre 2. variance, écart-type. Variables centrées, variables réduites.
Exemples simples de fonctions d'une variable aléatoire (tels que $aX + b$, $X^2$, $\exp X$…). Lois définies par une densité usuelle: loi uniforme, exponentielle, normale (ou de Laplace-Gauss). Densité d'un vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^2$. Indépendance de deux variables aléatoires réelles à densité. Aucune difficulté théorique ne doit être soulevée sur ces questions.

3. Convergence des suites de variables aléatoires

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev (cas des variables discrètes et des variables à densité).
Convergence en probabilité. Loi faible des grands nombres.
Approximation de la loi hypergéométrique par la loi binomiale.
Approximation de la loi binomiale par la loi de Gauss, par la loi de Poisson.
Énoncé du théorème limite central.
L'étude de la convergence en loi n'est pas au programme.

4. Notions de statistiques

a) Statistique descriptive: paramètres de position (moyenne, médiane, quantiles, modes) et de dispersion (écart-type, variance). Divers modes de représentation graphique.
b) Échantillons. Intervalle de confiance d'une moyenne ou d'une fréquence.
c) Tests d'hypothèse; les deux types de risque d'erreur.
d) Tests de paramètres: estimation du paramètre p d'une loi binomiale, de la moyenne m d'une loi normale. Test unilatéral, bilatéral. Comparaison de deux moyennes.

## ANNEXE II

### Instructions et commentaires

Ils figurent au BOEN n° 33 du 26 septembre 1991 et au BOEN Spécial n°5 du 21 octobre 1993.
Pour les épreuves écrites les candidats doivent se munir d'une calculatrice afin de s'en servir lorsque ce sera autorisé.
Pour les épreuves orales les calculatrices personnelles sont interdites. Pour les sujets qui en nécessiteraient l'usage, les candidats pourront en emprunter une à la bibliothèque du CAPES.

### Physique et chimie

Le programme du CAPES externe de physique et chimie est celui en vigueur, au cours de l'année scolaire 1999-2000, dans les classes suivantes : Cinquième, Quatrième, Troisième, Seconde (y compris l'option "Informatique et électronique en sciences physiques", et l'option "Technique des sciences physiques"), Première L, Première S (y compris l'option "Sciences expérimentales"), Terminale S (y compris l'enseignement de spécialité), Terminale STL "Physique du laboratoire et des procédés industriels", Terminale STL "Chimie du laboratoire et des procédés industriels", Section de Technicien Supérieur "Techniques physiques pour l'industrie et le laboratoire", Section de Technicien Supérieur "Chimiste".

#### Listes et instructions relatives à l'épreuve "montage et traitement automatisé de l'information"

Le "montage" est le moyen, pour le candidat, de démontrer sa capacité à utiliser le fait expérimental à des fins pédagogiques. Pour ce faire, il présente, sur un thème donné, des expériences